МИНИМИЗАЦИЯ СИММЕТРИЧЕСКИХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ В КЛАССЕ ПОЛИНОМОВ РИДА – МАЛЛЕРА

В.В. Дьяченко, В.П. Супрун

Белгосуниверситет, механико-математический факультет
пр-т Независимости 4, 220050 Минск, Беларусь
suprun@bsu.by

Под полиномом Рида-Маллера булевой функции $F = F(x_1, x_2, ..., x_n)$ понимается полином, в слагаемые которого одна часть переменных функции F входит только с отрицанием, а другая ее часть – только без отрицания. В частности, полином Жегалкина P(F) является положительно поляризованным полиномом Рида-Маллера функции F.

В общем случае булева функция $F = F(x_1, x_2, ..., x_n)$ имеет 2^n полиномов Рида-Маллера, которые отличаются друг от друга поляризацией переменных, числом слагаемых и числом вхождений переменных в слагаемые полиномов.

Если булева функция $F = F(x_1, x_2, ..., x_n)$ является симметрической, то такая функция имеет $n+1$ различных полиномов Рида-Маллера $P_0(F)$, $P_1(F)$, ... , $P_n(F)$, где полином $P_k(F)$ содержит ровно k переменных с отрицанием и $0 \leq k \leq n$. Здесь $P_0(F)$ - полином Жегалкина $P(F)$ и $P_n(F)$ - отрицательно поляризованный полином Рида-Маллера функции F, который обозначается как $Q(F)$.

Метод построения монотонно поляризованных полиномов $P(F)$ и $Q(F)$ для симметрических булевых функций $F = F(x_1, x_2, ..., x_n)$ (метод треугольника) описан в работе [1], а метод разложения симметрических булевых функций n переменных в полиномы Рида-Маллера с произвольной поляризацией переменных приводится в [2].

Под сложностью полинома $P_k(F)$ обычно понимается число $l_1(P_k)$ слагаемых (элементарных конъюнкций) или число $l_2(P_k)$ вхождений переменных x_1,x_2, ... ,x_n в слагаемые полинома $P_k(F)$.

По аналогии с теорией ДНФ под кратчайшим полиномом Рида-Маллера $P_{short}(F)$ булевой функции F будем понимать полином с минимальным значением l_1 среди всех полиномов $P_0(F)$, $P_1(F)$, ... , $P_n(F)$, а под минимальным полиномом $P_{min}(F)$ – полином с минимальным значением l_1 среди полиномов $P_0(F)$, $P_1(F)$, ... , $P_n(F)$.

Следует отметить, что до последнего времени под минимальным полиномом Рида-Маллера булевой функции F понимался кратчайший полином Рида-Маллера, что совершенно не соответствует общепринятому определению кратчайшей и минимальной ДНФ булевых функций.

Пусть $F = F(x_1, x_2, ..., x_n)$ — произвольная симметрическая булева функция n переменных и $P_0(F)$, $P_1(F)$, ... , $P_n(F)$ - всевозможные полиномы Рида-Маллера функции F. Каждый из $n + 1$ полиномов имеет сложность $l_1(P_0)$, $l_1(P_1)$, ... , $l_1(P_n)$. Тогда под сложностью $l_1(F)$ функции F понимается $l_1(F) = \min\limits_{0 \leq k \leq n} l_1(P_k)$. Очевидно, что здесь $l_1(F)$ — число слагаемых полинома $P_{short}(F)$. Функция Шеннона $L_1(n)$ для оценки сложности (по числу слагаемых) симметрических булевых функций n переменных определяется, как $L_1(n) = \max l_1(F)$, где максимум берется по всем $2^{(n+1)}$ симметрическим булевым функциям n переменным.

В 1995 году было установлено [3], что $L_1(n) = [\frac{2^{n+1}}{3}]$. Отметим, что данная оценка функции Шеннона справедлива как для симметрических, так и для произвольных булевых функций n переменных.

Введем в рассмотрение функцию Шеннона $L_2(n)$ для оценки сложности симметрических булевых функций $F = F(x_1, x_2, ..., x_n)$ по числу вхождений переменных в слагаемые полиномов Рида-Маллера.

Пусть $F = F(x_1, x_2, ..., x_n)$ — произвольная симметрическая булева функция n переменных и $P_0(F)$, $P_1(F)$, ... , $P_n(F)$ - всевозможные полиномы Рида-Маллера функции F, каждый из которых имеет сложность (по числу вхождений переменных в слагаемые полиномов)

$l_1(P_0)$, $l_1(P_1)$, ... , $l_1(P_n)$. Тогда $l_2(F) = \min\limits_{0 \le k \le n} l_2(P_k)$ и $L_2(n) = max l_2(F)$, где максимум берется по всем симметрическим булевым функциям n переменным.

Для вычисления значений $L_2(n)$ при условии, что $2 \le n \le 14$, была написана программа на языке C++ в среде разработки Borland Builder 6 для ОС семейства Windows, которая реализует приведенный в работе [2] метод построения полиномов $P_k(F)$ симметрических булевых функций $F = F(x_1, x_2, ..., x_n)$. Работа программы основана на переборе всевозможных полиномов Рида-Маллера всех $2^{(n+1)}$ симметрических булевых функций n переменных. Результаты опытной эксплуатации программы представлены посредством таблицы, в которой приведены также локальные коды $\pi(F)$ симметрических булевых функций F, на которых было достигнуто значение функции Шеннона $L_2(n)$.

n	$L_2(n)$	$\pi(F)$	k
2	2	010	0
3	7	0110	1
4	20	00100	2
5	52	010010	2
6	126	0010010	0
7	295	01001001	1
8	680	001001001	0
9	1531	0110110110	1
10	3410	00100100100	2
11	7504	010010010010	2
12	16380	0010010010010	0
13	35491	01001001001001	1
14	76454	001001001001001	0

К настоящему времени пока не удалось вывести аналитическую зависимость значения функции Шеннона $L_2(n)$ от числа переменных n симметрических булевых функций. Однако научные исследования в этом направлении продолжаются.

Литература

1. Супрун В. П. *Полиномиальное разложение симметрических булевых функций* // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1985. №4. С. 123 — 127.

2. Suprun V. P. *Fixed Polarity Reed-Muller Expressions of Symmetric Booleans Functions* // Proc. IFIP WG 10.5 Workshop on Applications of the Reed-Muller Expansion in Circuit Design (Reed-Muller'95). 27–29 August 1995. Makuhari, Chiba, Japan. P. 246 – 249.

3. Перязев Н. А. *Сложность булевых функций в классе полиномиальных поляризованных форм* // Алгебра и логика. 1995. Т. 34. №3 С. 323 — 326.